Réseaux de Petri

1. Définitions et Fonctionnement

Définition algébrique

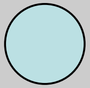
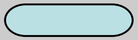
RdP **$R = \langle P, T ; Pre, Post \rangle$**

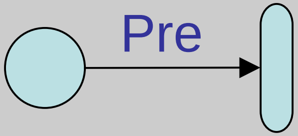
- P Ensemble fini de Places
- T Ensemble fini de Transitions
- $Pre : P \times T \to N$ *incidence avant*
- $Post : P \times T \to N$ *incidence arrière*

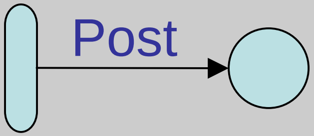
RdP marqué **$R(M) = \langle P, T ; Pre, Post, M \rangle$**

- $M : P \to N$ *marquage*

Graphe associé

- **Graphe biparti**
  - Nœuds
    - Places 
    - Transitions 
  - Arcs valués





par convention, un arc non valué possède implicitement la valeur 1 (cas fréquent en pratique)

  - Marquage

Jeton (token)

Franchissabilité

- **Une transition $t \in T$ est *franchissable* pour un marquage M ssi**

$$\forall p \in P \quad M(p) \geq Pre(p,t)$$

  - chaque place p entrée de t doit être marquée d'une valeur supérieure à la valeur de l'arc $p \rightarrow t$
  - la relation est trivialement vraie pour toute place p non entrée de t (Pre (p,t) = 0)

- **Notation** **M(t>**

Franchissement

- **Une transition $t \in T$ est *franchie* pour un marquage M, donnant un marquage M' ssi**

  M(t> *t est franchissable pour* **M**

  $\forall\, p \in P$ $\quad M'(p) = M(p) - Pre\,(p,t) + Post\,(p,t)$

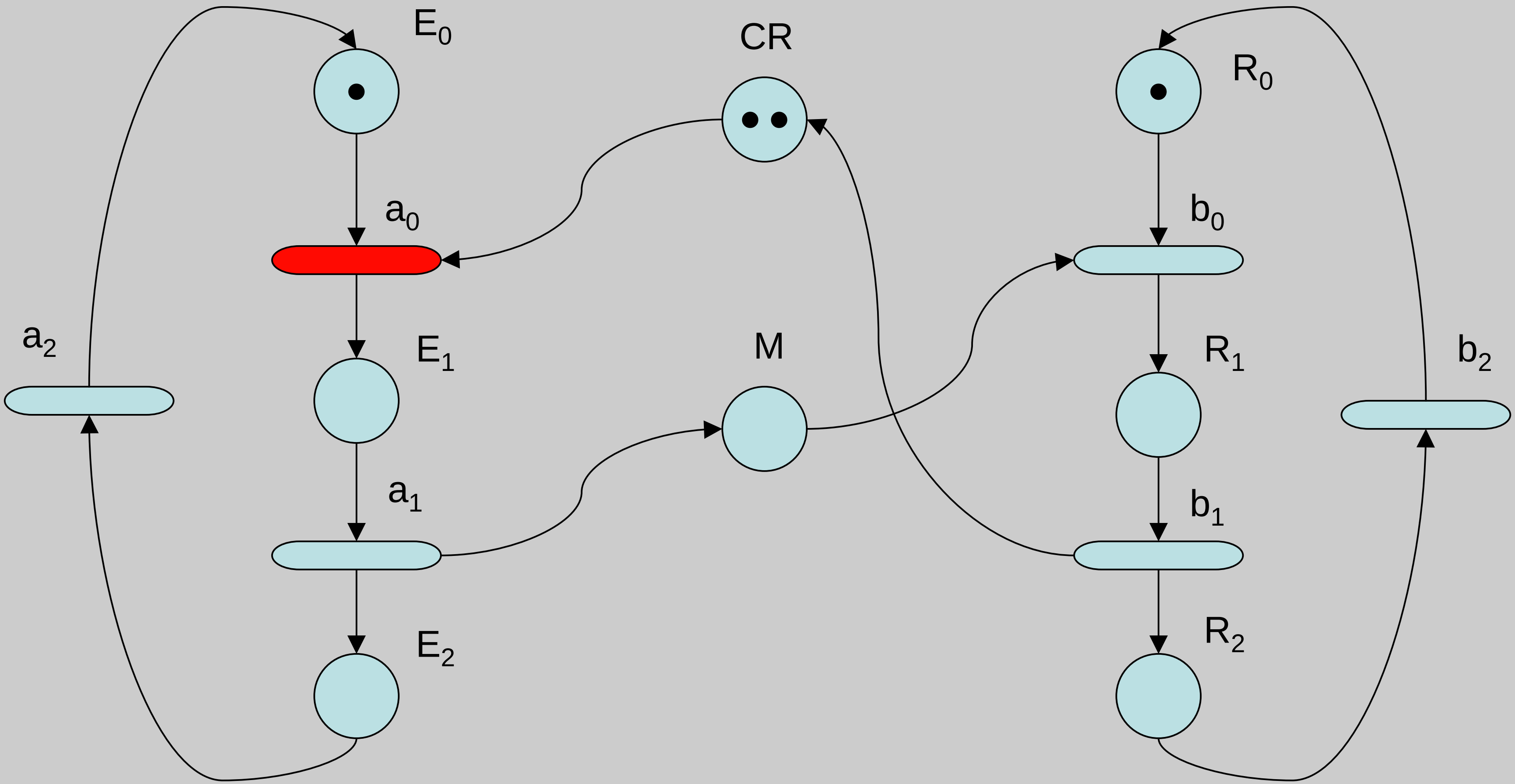
  le franchissement de t

  – retire de chaque place p entrée de t un nombre de jetons égal à la valeur de l'arc $p \rightarrow t$

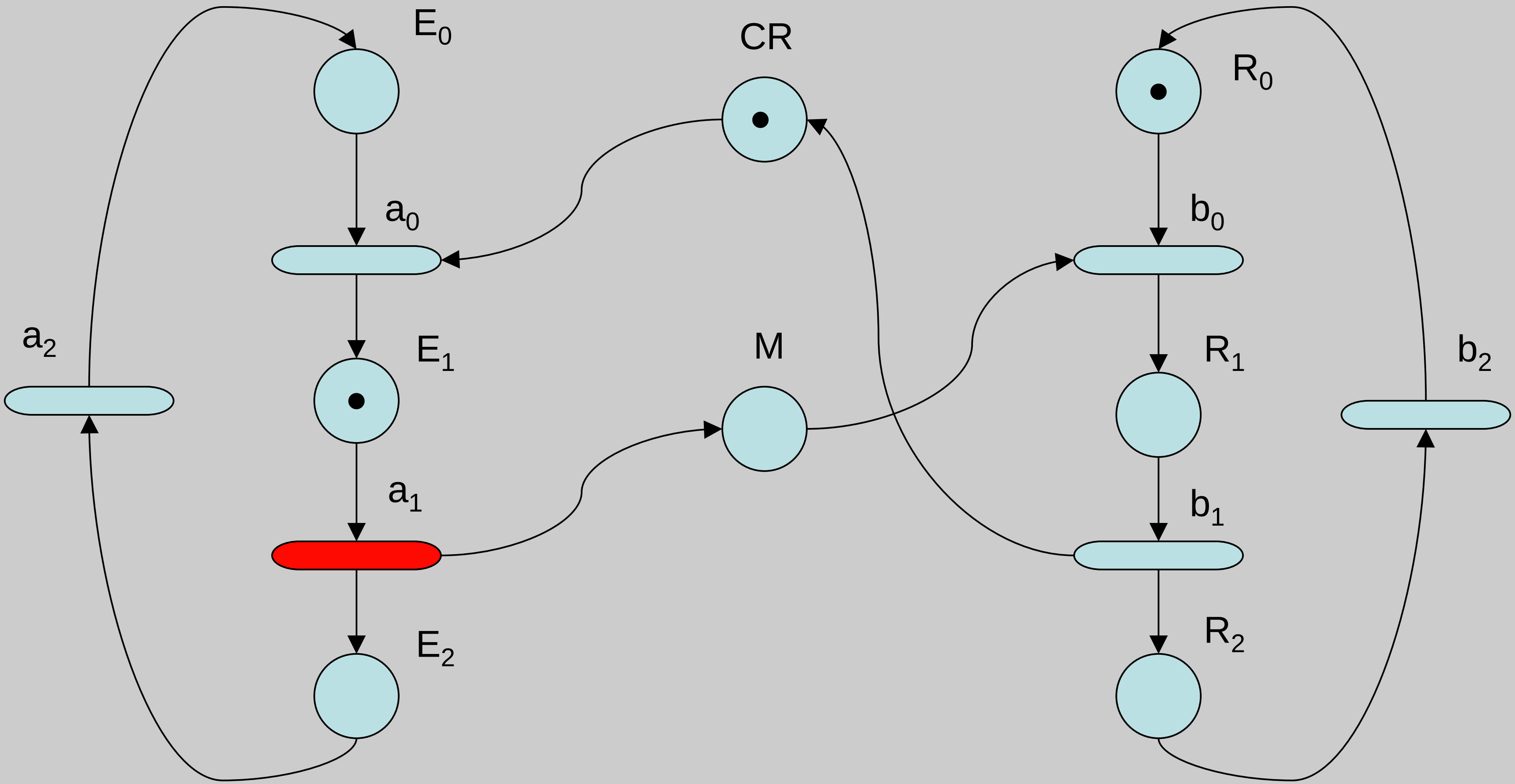
  – ajoute à chaque place p sortie de t un nombre de jetons égal à la valeur de l'arc $t \rightarrow p$

- **Notation** **M(t>M'**

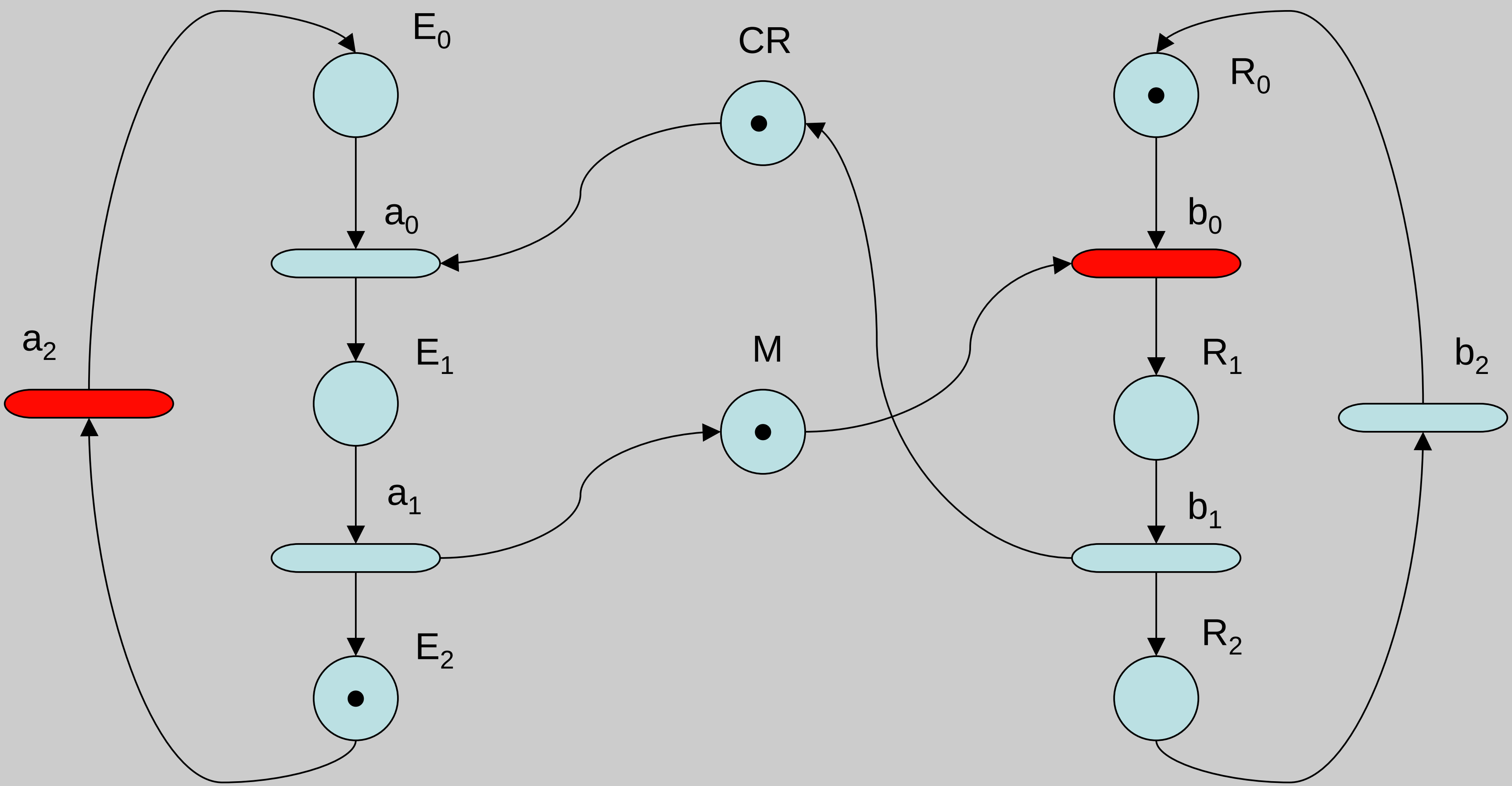
Exemple 1 : Communication



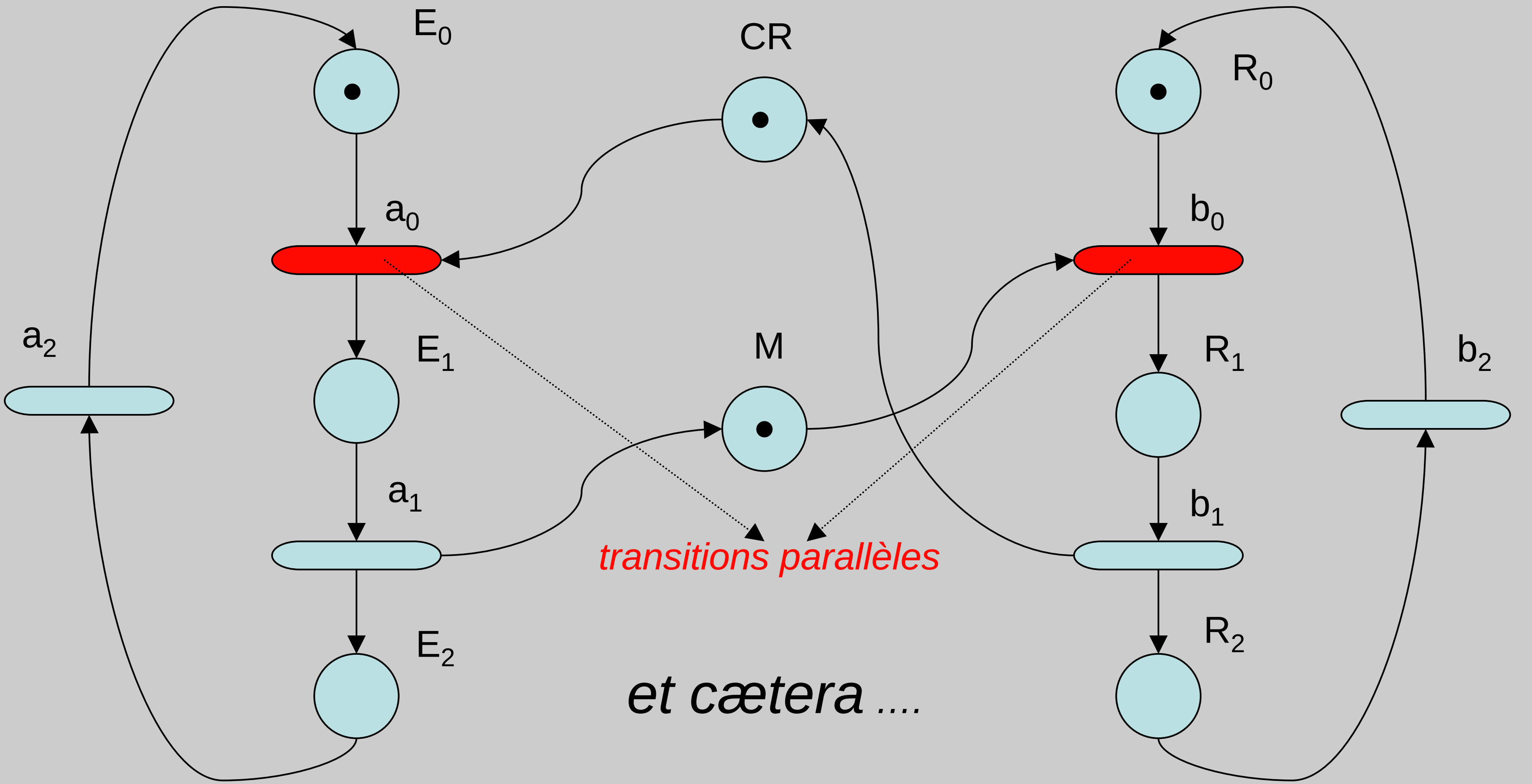
Exemple 1 : Communication



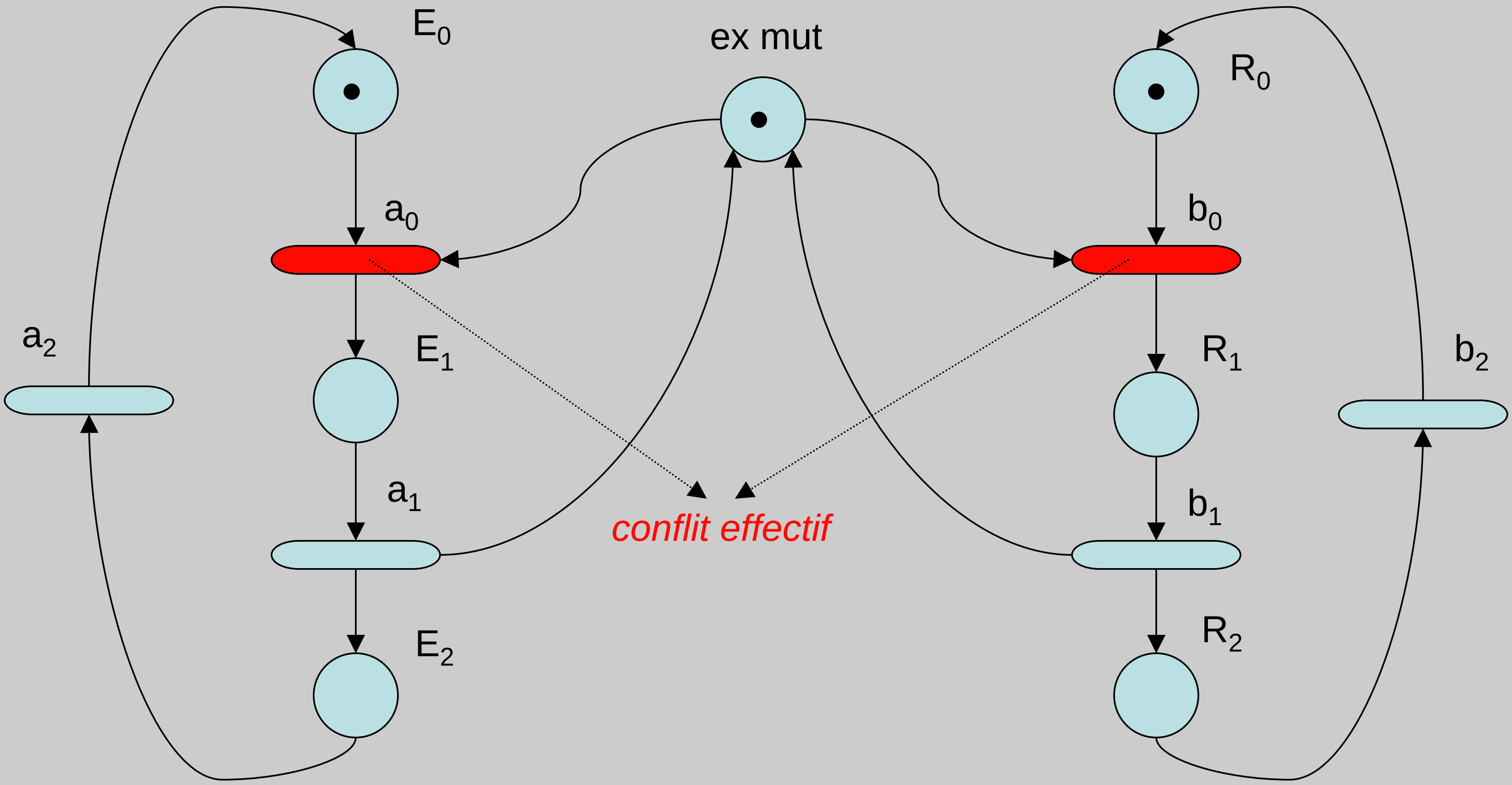
Exemple 1 : Communication



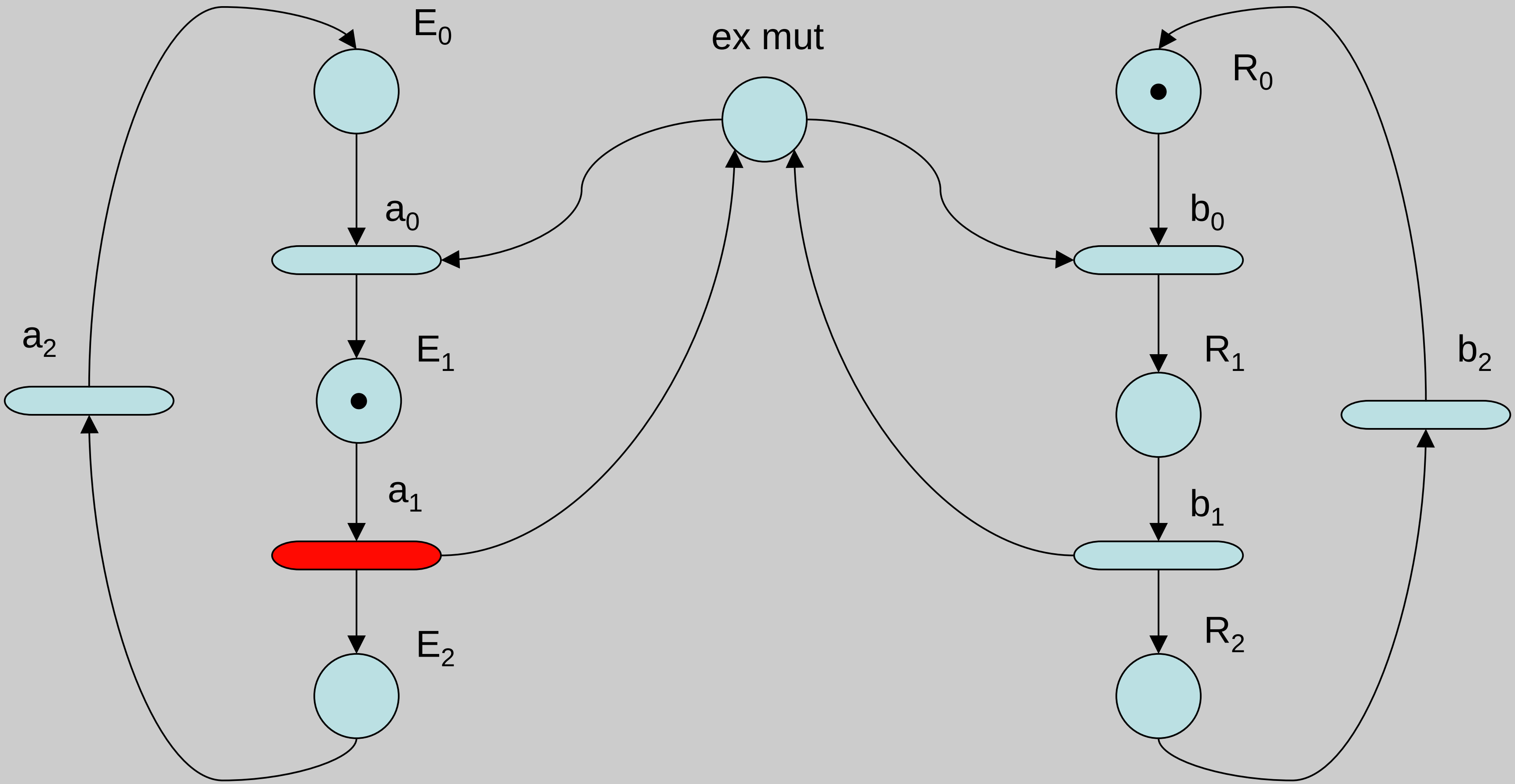
Exemple 1 : Communication



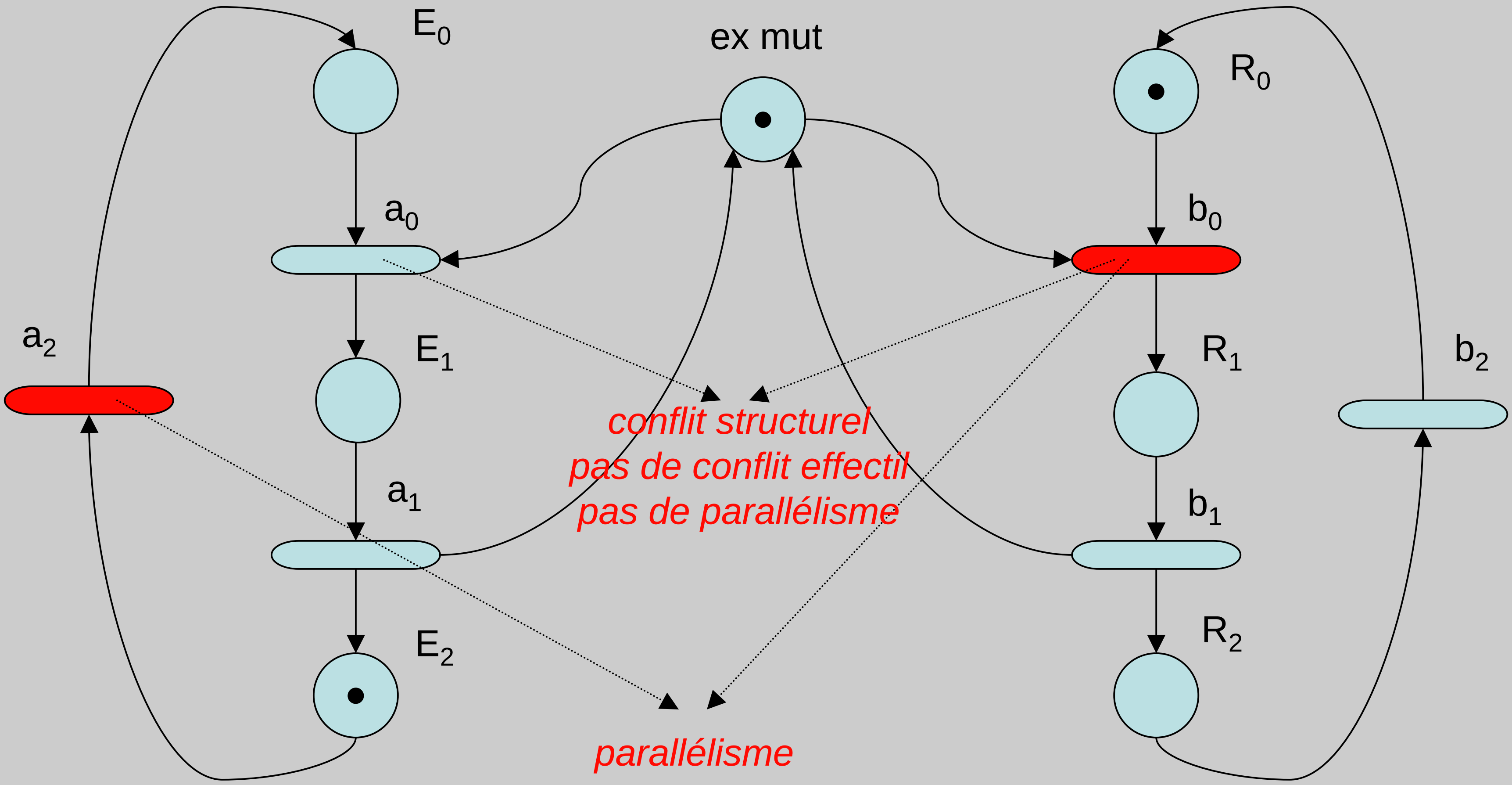
Exemple 2 : Partage conflictuel



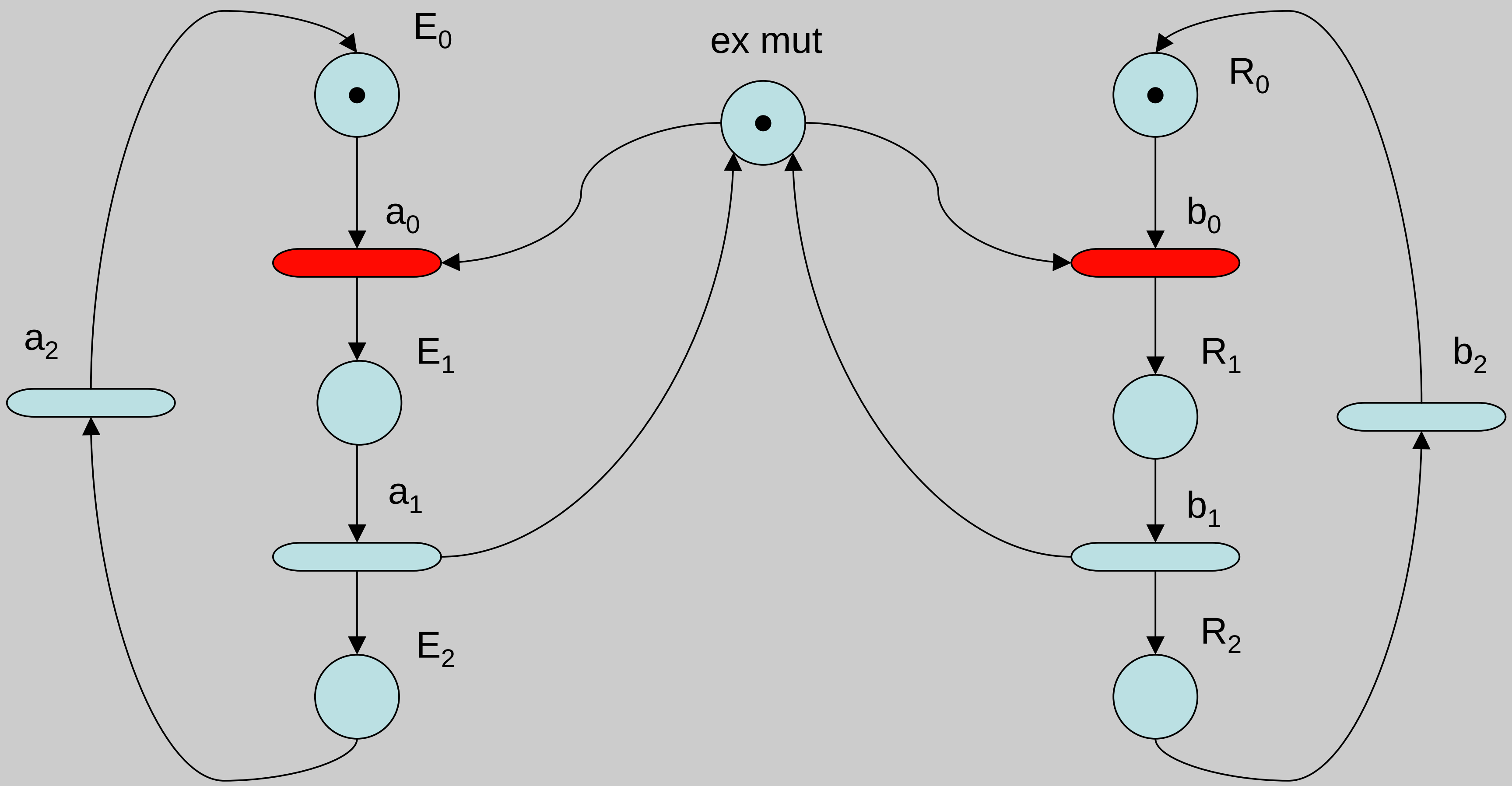
Exemple 2 : Partage conflictuel



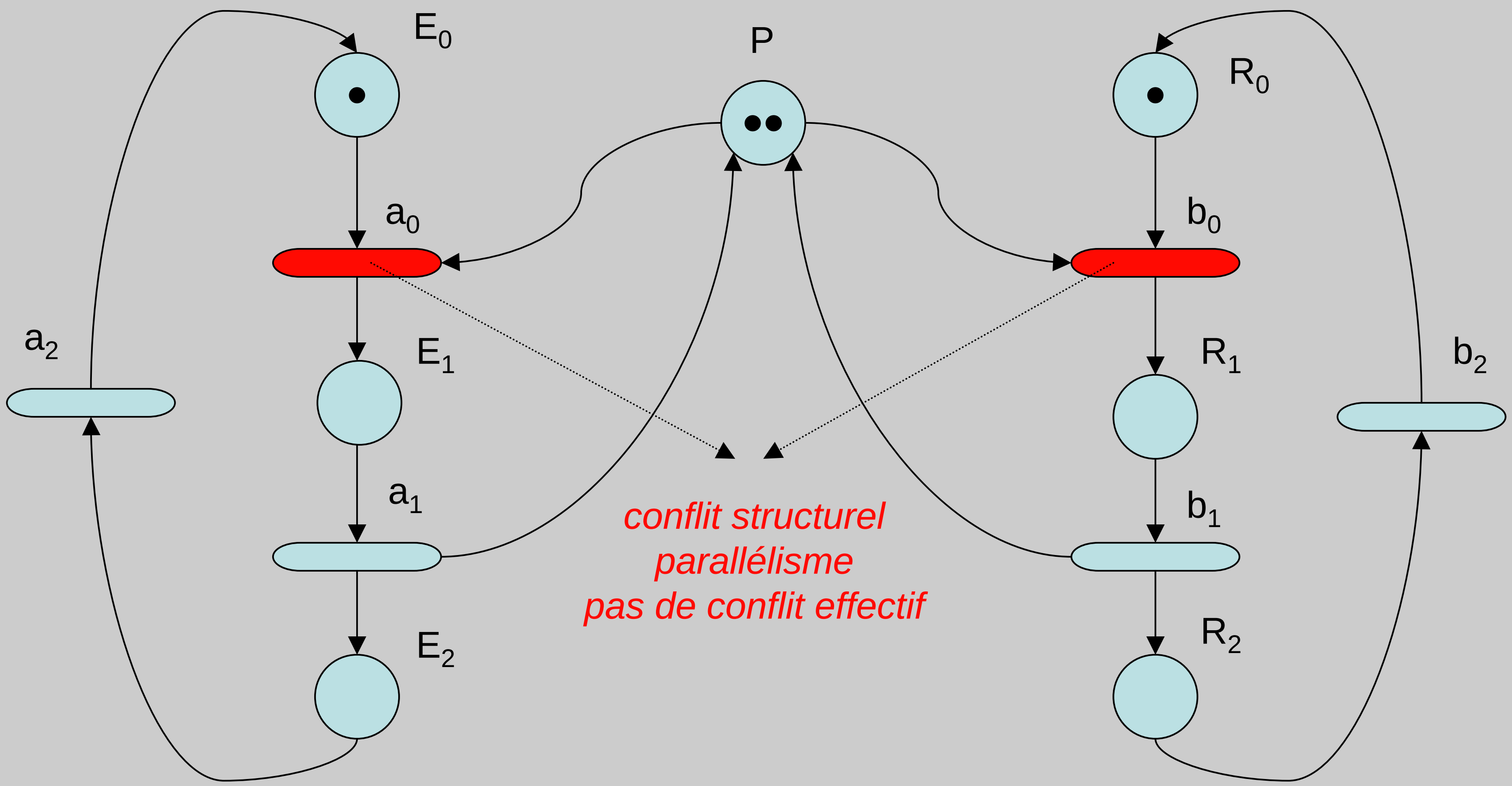
Exemple 2 : Partage conflictuel



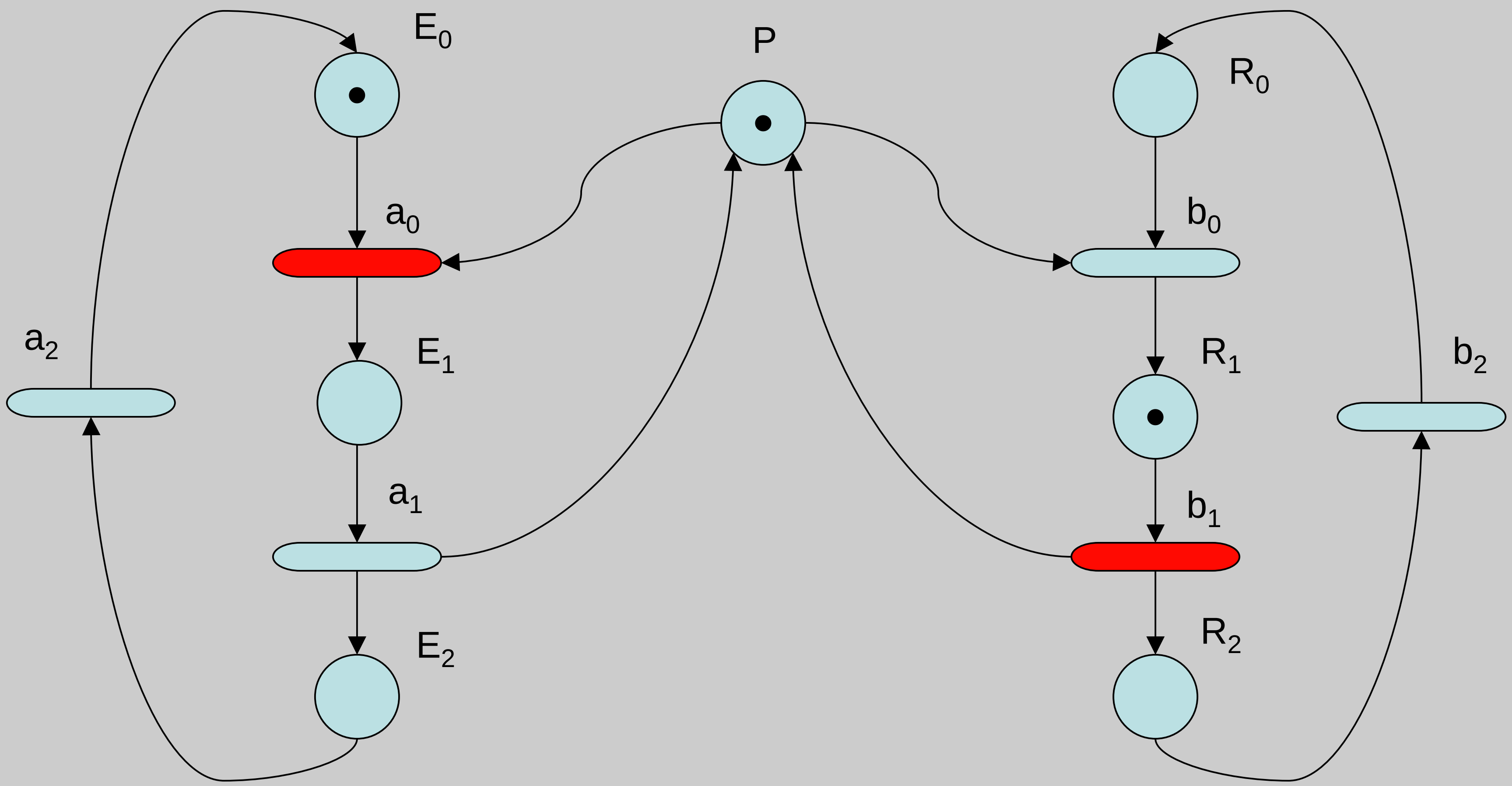
Exemple 2 : Partage conflictuel



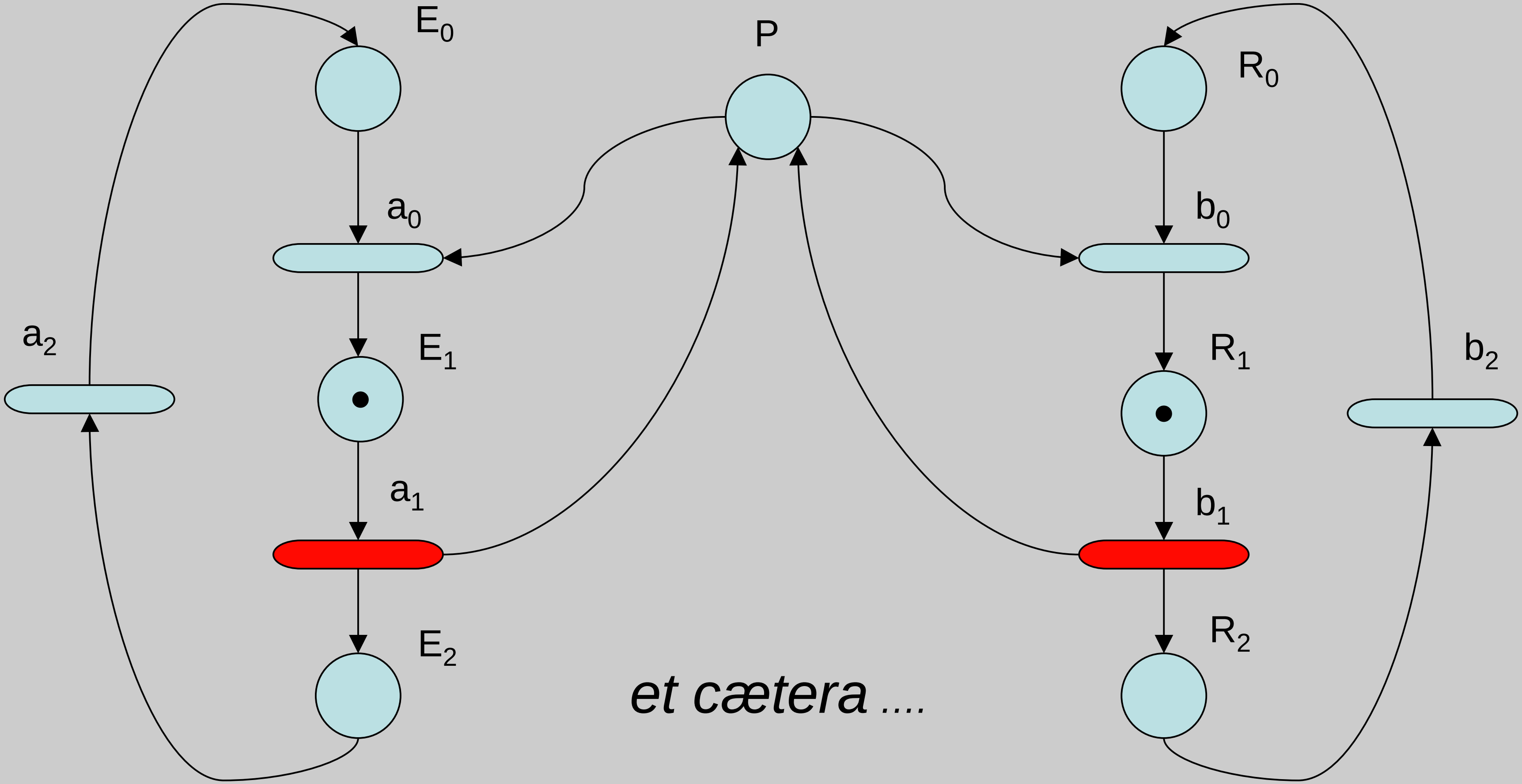
Exemple 3 : Partage sans conflit



Exemple 3 : Partage sans conflit



Exemple 3 : Partage sans conflit



et cætera ....

Réseaux de Petri

2. Algèbre linéaire

Séquence de franchissements

- **$s = t_{i1}, t_{i2}, \dots t_{iq} \in T^*$ est une séquence de franchissements pour un marquage M_0 donnant M_q noté $M_0\ (s> M_q$ ssi**

Définition récursive

  - $s = \lambda$ *(mot vide)* et $M_q = M_0$
  - $s = s't \quad s' \in T^* \quad t \in T \quad M_0\ (s'> M_{q-1}$ et $M_{q-1}\ (t> M_q$

Définition itérative

  - $M_0\ (t_1> M_1\ (t_2> M_2 \dots M_{q-1}\ (t> M_q$

Séquence de franchissements

- **Relations entre marquages**

$s = t_{i1}, t_{i2},\dots t_{iq}$ franchissable pour $M_0 \Rightarrow \forall p \in P$

$M_1(p) = M_0(p) - Pre(p,t_{i1}) + Post(p,t_{i1})$

$M_2(p) = M_1(p) - Pre(p,t_{i2}) + Post(p,t_{i2})$

……

$M_q(p) = M_{q-1}(p) - Pre(p,t_{iq}) + Post(p,t_{iq})$

en appelant σ_i le nombre d'occurrences de t_i dans s

$$M_q(p) = M_0(p) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i (Post(p,t_i) - Pre(p,t_i))$$

Représentation matricielle

- **$< P, T ; Pre, Post, M >$**

  $|P| = n$

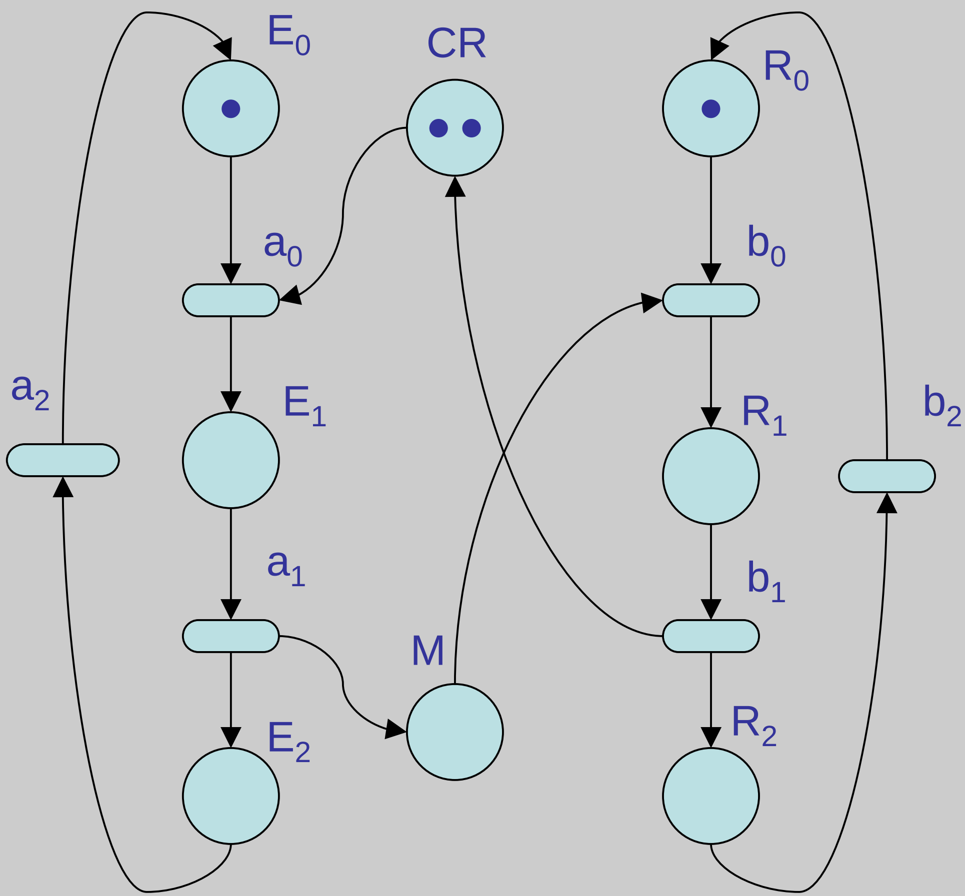
  $|T| = m$

$$\left.\begin{array}{l} Pre : P \text{ x } T \to N \\ Post : P \text{ x } T \to N \end{array}\right\}$$

peuvent être représentées par des <u>matrices</u>

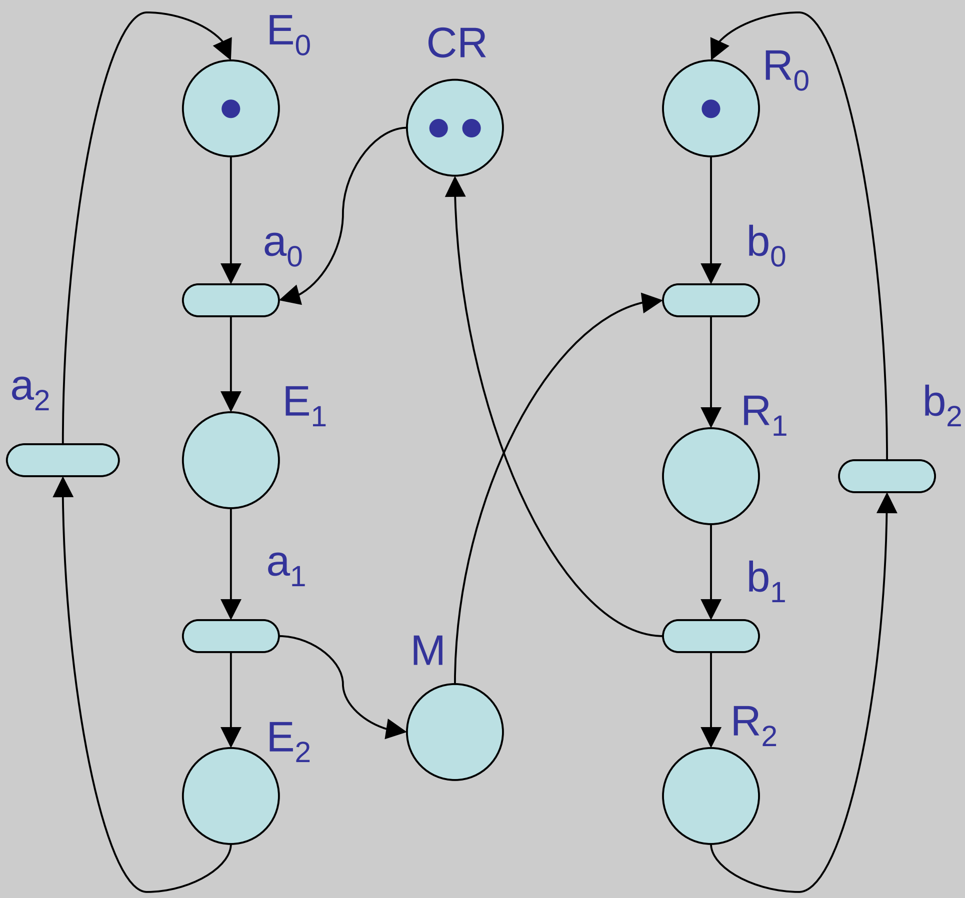
$M : P \to N$ *peut être représenté par un <u>vecteur</u>*

Représentation matricielle



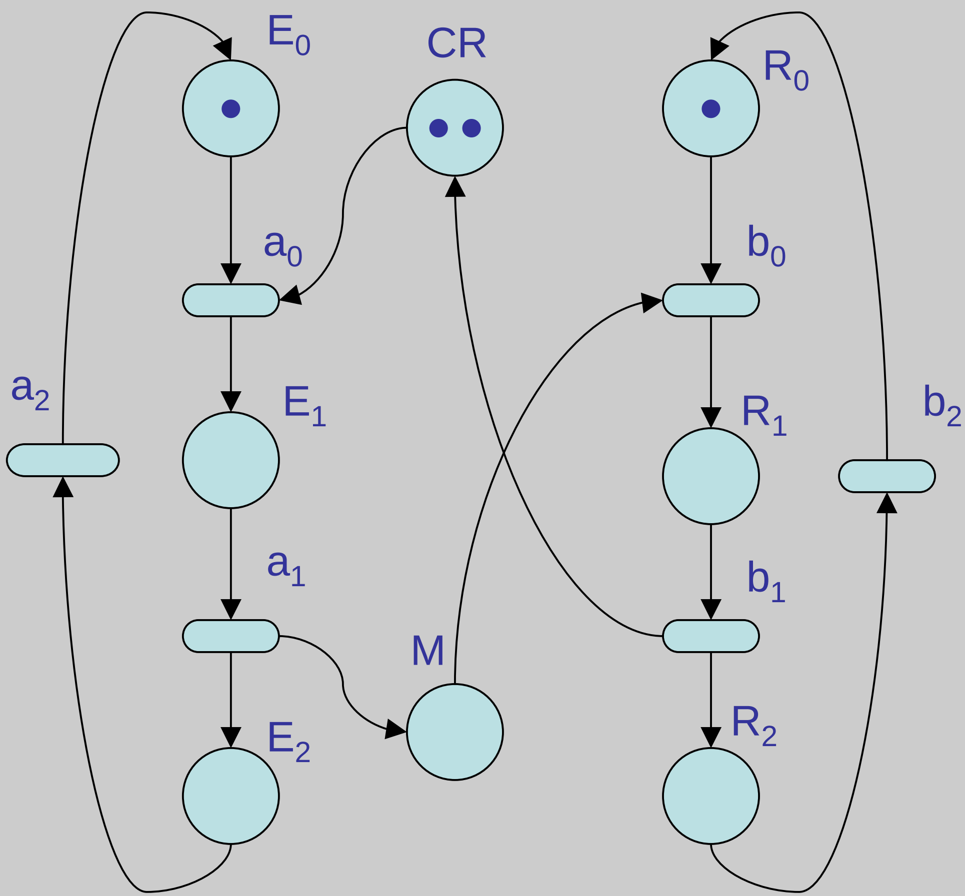
$$
\begin{array}{c|c}
Pre & \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array} \\
\begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ CR \\ M \\ R_2 \\ R_1 \\ R_0 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Représentation matricielle



$$
\begin{array}{c|c}
Post & \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array} \\
\begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ CR \\ M \\ R_2 \\ R_1 \\ R_0 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Représentation matricielle



$$
\begin{array}{cc}
 & M_0 \\
\begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ CR \\ M \\ R_2 \\ R_1 \\ R_0 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Représentation matricielle

- **Réseau pur**

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbf{P} \;\; \forall \mathbf{t} \in \mathbf{T} \;\; \mathbf{Pre\ (p,t)\ x\ Post\ (p,t) = 0}$$

  - aucune place ne peut être entrée *et* sortie d'une transition
  - indépendance de l'ajout et du retrait de jetons lors des franchissements

Représentation matricielle

- **Matrice d'incidence ou de connexion**

$$\mathbf{C\ (p,t) = Post\ (p,t) - Pre\ (p,t)}$$

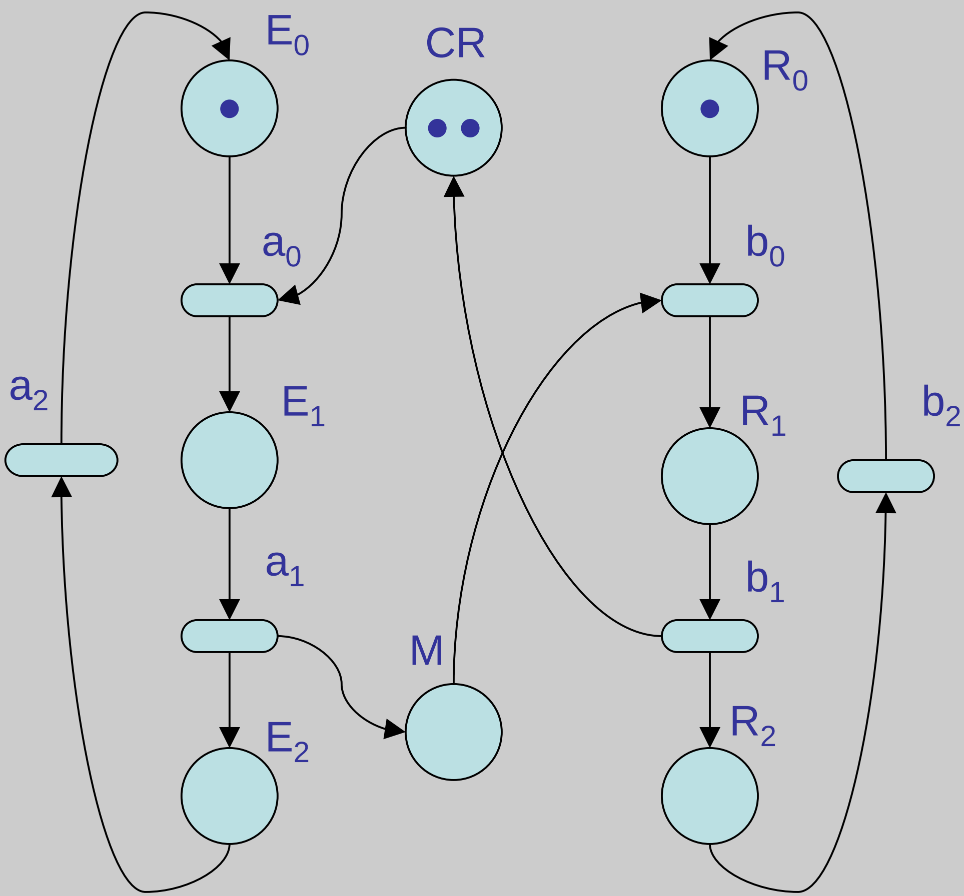
- pour un réseau *pur*, la matrice C permet de construire *de façon unique* les matrices Post et Pre

$$Pre\ (p,t) = \max\ (0, - C(p,t)\ )$$

$$Post\ (p,t) = \max\ (0, C(p,t)\ )$$

- un réseau de Petri ***pur*** est *totalement défini* par **C**

Représentation matricielle



$$
\begin{array}{c|c}
C & \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array} \\
\begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ CR \\ M \\ R_2 \\ R_1 \\ R_0 \end{array} &
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Equation fondamentale

$\forall$ M $\in$ [M_0] $\forall$ s $\in$ T * telle que M_0 (s> M

σ_i = *nombre d'occurrences de t_i dans s* $\Rightarrow$

$\forall$p $\in$ P

$$M(p) = M_0(p) + \sum_{i=1}^{m} C(p, t_i) \bullet \sigma_i$$

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$ *peut être représenté par un vecteur appelé vecteur caractéristique de s*

$$M = M_0 + C \bullet \sigma$$

est appelée *<u>équation fondamentale</u>*

Semi flots de transitions

- **Séquence répétitive**

  s *répétitive* pour M ssi M (s> M

  les marquages initial et final de s sont identiques

  σ vecteur caractéristique de s

  $M = M + C\,\sigma \qquad \Rightarrow \qquad C\,\sigma = 0$

  Toute séquence répétitive s a son vecteur caractéristique σ solution de $C\,\sigma = 0$

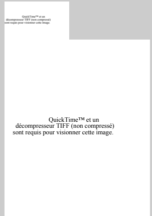
Semi flots de transitions

- **La réciproque est *<u>fausse</u>* : toute solution de C σ = 0 *<u>n'est pas</u>* le vecteur caractéristique d'une séquence répétitive**
  - il faut que $\forall i \; \sigma_i \in N$
  - il faut que s soit franchissable pour M
- **Les solutions de C $\sigma = 0$ pour $\sigma_i \in N$ sont appelées des *semi flots* de transitions**
  - les flots (plus difficiles à interpréter) sont les solutions de C $\sigma = 0$ pour $\sigma_i \in Z$

Semi flots de transitions

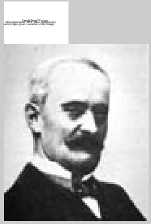
- **L'équation C $\sigma = 0$ pour $\sigma_i \in$ N est une équation linéaire homogène en nombres entiers**
  - hormis la solution triviale sans intérêt $\sigma = 0$ toute combinaison linéaire de solutions est aussi une solution
  - une famille génératrice $\{\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots\}$est un ensemble de solutions tel que toute solution peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de cette famille
  - une plus petite famille génératrice ***ppfg*** est une famille de cardinal minimal
  - il est donc nécessaire et suffisant de trouver une ***ppfg***
  - Analogie avec une ***base*** en algèbre linéaire

Semi flots de transitions



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- **Utilisation des semi flots de transitions :**
  - on calcule une base de solutions de C $\sigma = 0$ pour $\sigma_i \in N$
    - les méthodes de résolution sont inspirées de l'algèbre linéaire, de la programmation en nombres entiers et des méthodes d'élimination de Gauss et Farkas
  - on recherche dans ces solutions les séquences répétitives s pour un marquage M (en général M_0), dont les vecteurs caractéristiques sont les solutions trouvées



Gyula Farkas (1847-1930)

Semi flots de places

- **On définit une application $\varphi : P \rightarrow N$ exprimant l'idée de « poids » d'un jeton dans une place**

- **On peut exprimer l'idée de « conservation » de jetons ainsi pondérés, par l'invariance du produit scalaire $\varphi \, . \, M = \varphi \, . \, M_0 \;\; \forall \, M \in [M_0]$**

Semi flots de places

- **Calcul des valeurs de φ :**

$\forall$ M $\in$ [M_0] $\forall$ s $\in$ T* M_0 (s> M

σ vecteur caractéristique de s

$$\boxed{M = M_0 + C \bullet \sigma}$$

$$\varphi \,.\, M = \varphi \,.\, M_0 \Leftrightarrow \varphi \,.\, C = 0$$

pour qu'une pondération φ permette une conservation pondérée de tout marquage accessible M il faut et il suffit que φ soit solution dans N de φ . C = 0

Semi flots de places

- **Les solutions de φ C = 0 pour $\varphi_i \in$ N sont appelées des *semi flots* de places**
  - les flots (plus difficiles à interpréter) sont les solutions de φ C = 0 pour $\varphi_i \in$ Z
- **Comme pour les semi flots de transitions, l'équation φ C = 0 pour $\varphi_i \in$ N est une équation linéaire homogène en nombres entiers**
  - Il est donc nécessaire et suffisant de trouver une plus ***ppfm*** de solutions

Semi flots de places

- **Invariants**
  - les quantités φ M = φ M_0 pour $\varphi_i \in$ N sont appelés des *invariants*
- **Supports**
  - un support de φ, noté $||\varphi|| = \{ p \in P \mid \varphi(p) > 0 \}$
- **Couvertures**
  - les solutions *strictement positives* φ telles que $\forall\ p \in P$ $\varphi(p) > 0$ sont appelées des *couvertures*

Semi flots de places

- **Théorème**
  - Un réseau de Petri admettant une couverture φ est structurellement borné
- **Preuve**

φ Couverture $\Rightarrow \forall\, M \in [M_0\rangle \quad \varphi.M = \varphi.M_0$

et $\forall\, p \in P \qquad \varphi(p) > 0$

$\Rightarrow \forall\, p \in P \qquad \varphi(p).M(p) \leq \varphi.M_0$

$\Rightarrow \forall\, p \in P \qquad M(p) \leq (\varphi.M_0) \,/\, \varphi(p)$

That's all folks!